Vypracoval: **Miloslav Krajl**

Kvadraticky optimální (LQ) regulátor, algebraická Riccatiho rovnice a její řešení. Kvadraticky optimální sledování. Prediktivní a zpětnovazební strategie řízení, prediktivní regulátor. Nestrukturovaná neurčitost, analýza robustní stability, frekvenční vlastnosti LQ regulátorů (spojitý, diskrétní).

Otázka pokrývá partie předmětu **X35MTR**. Tato otázka je vypracována dle [1], [2], [3] a zápisek z přednášek.

# Obsah


**1 Kvadraticky optimální (LQ) regulátor** **1**

**2 Algebraická Riccatiho rovnice a její řešení** **4**

**3 Kvadraticky optimální sledování** **5**

**4 Frekvenční vlastnosti LQ regulátorů (spojitý, diskrétní)** **5**

**5 Prediktivní a zpětnovazební strategie řízení, prediktivní regulátor** **6**

**6 Nestrukturovaná neurčitost, analýza robustní stability** **8**


# 1 Kvadraticky optimální (LQ) regulátor

LQ regulátor:

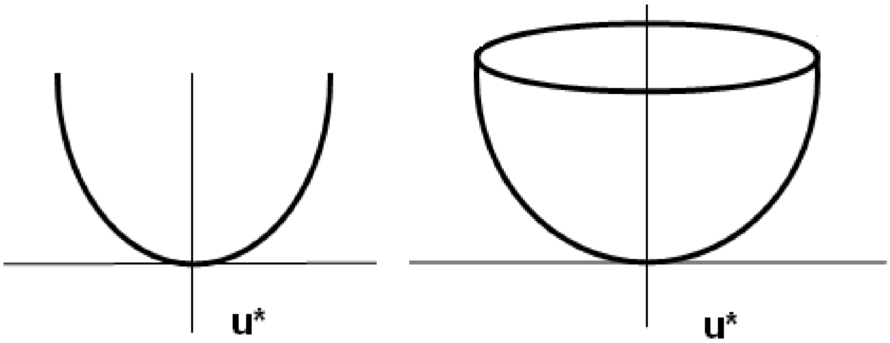
- lineární systém
  $x(t+1) = Ax(x) + Bu(t)$
  $y(t) = Cx(x) + Du(t)$
- kvadratické kritérium
  $J = kx^2$
  $J = x^T Px$

- princip otimality – ať je systém v jakémkoliv stavu $x(k)$ do kterého se dostal působením $u(0)..u(k-1)$, pak musí být zbylá posloupnost $u(k)..u(N)$ *optimální* vycházející ze stavu $x(k)$
- kritérium opimality – hodnota ztrátové funkce v počátečním čase ($k = 0$)

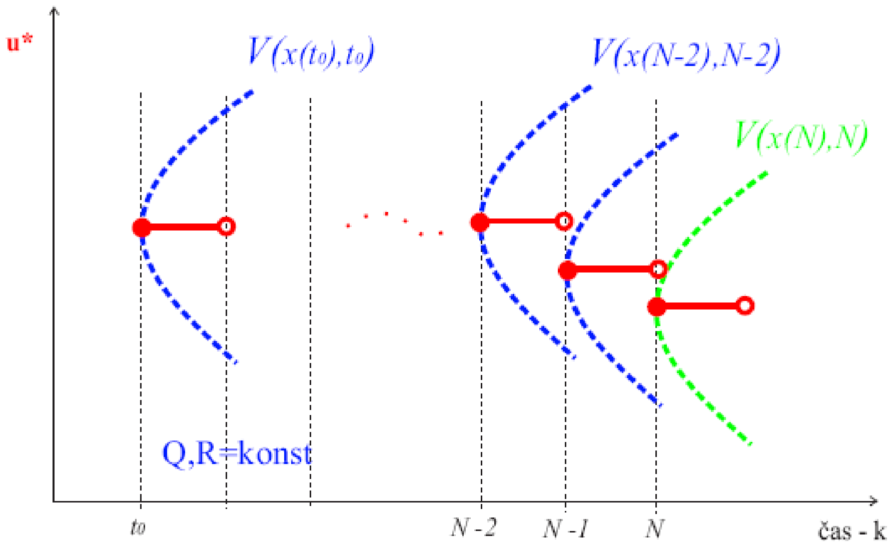
Hodnota kriteria:

$$J = V\left(x(0), u_0^{N-1}), 0\right) \tag{1}$$

Při optimálním řízení se snažíme v každém kroku optimalizace vlivem aditivity minimalizovat kritérium 1. Tento fakt ilustruje předchozí obrázek 2, kdy s rostoucím časem klesá hodnota řízení $u^*$.




Obrázek 1: Kvadratické kritérium a) parabola b) kvadratická forma




Obrázek 2: Princip LQ algoritmu

**Diskrétní LQ regulátor:** systém musí být stabilizovatelný (všechny nestabilní módy dosažitelné, (test matice dosažitelnosti)). Hodnota ztrátové funkce lze zapsat jako:

$$V\left(x(k_0), u^{k_0}, k_0\right) = \frac{1}{2}x^T\mathbf{Q}x + \frac{1}{2}\sum_{k_0}^{N-1}[x^T \; u^T]\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S^T} & \mathbf{R} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{2}$$

kde matice $\mathbf{Q}$ (pozitivně semidefinitní) váží regulační odchylku a $\mathbf{R}$ (pozitivně definitní) váží řízení. Vážení lze chápat jako cenu (energii), určuje zda-li upřednosťnujeme velké akční zásahy za cenu velké energie řízení (např. spálení většího množství paliva), nebo "volný" průběh regulace, kdy se systém blíží k žádané hodnotě s minimem akčních zásahů, doba regulačního pochodu je přirozeně delší.

**Optimální řízení:** snažíme se minimalizovat kritérium v každém kroku, tuto skutečnost lze zapsat dle principu dynamického programování:

$$V^*(x(k), k) = \min_u V\left(x(k), u_k^{N-1}), k\right) \tag{3}$$

v posledním kroce $K = N$ předpokládáme hodnotu ztrátové funkce

$$V\left(x(k_0), u^{k_0}, k_0\right) = \frac{1}{2} x^T \mathbf{Q} x + \mathbf{0} \tag{4}$$

tudíž prvky v sumě "vymizely". V čase $t = N$ se rovná $P(N) = Q(N)$. Můžeme tedy optimální hodnotu ztrátové funkce odhadnout ve tvaru kvadratické formy:

$$V^*(x(t), t) = \frac{1}{2} x(t)^T \mathbf{P(t)} x(t) \tag{5}$$

Abychom tuto hodnotu získali, tak jí například upravíme na úplný čtverec. Hodnotu získáme z matice kvadratické formy $\mathbf{P}(t)$ tzv. jádra (nulového prostoru). Další metodou je hledání vázaných extrémů tzv. Lagrageových multiplikátorů.

Získáváme Ricattiho diferenční rovnici pro LQ regulátor, jejíž řešení je popsáno n následujícím odstavci.
Ricattiho diferenční rovnice:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{M}^T \mathbf{P}(k+1)\mathbf{M} - \mathbf{M}^T \mathbf{P}(k+1)\mathbf{N}\mathbf{K}(k) \tag{6}$$

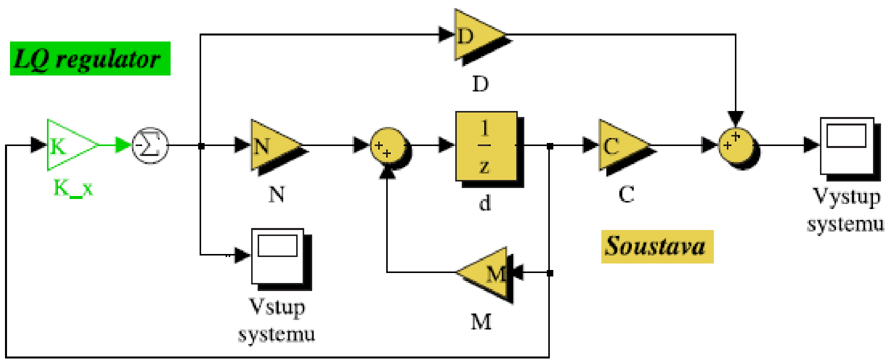
Kalmanovo zesílení:

$$\mathbf{K}(k) = (\mathbf{R}(\mathbf{k}) + \mathbf{N^T P(k+1) N})^{-1} \mathbf{N^T P(k+1) M}(k) \tag{7}$$

s koncovou podmínkou:
$\mathbf{P}(N) = \mathbf{Q}(N)$ Optimální hodnota:

$$u^*(k) = -\mathbf{K}(k) x(k) \tag{8}$$

všechny stabilizující regulátory jsou parametrizovány maticemi $\mathbf{Q}(\mathbf{k}), \mathbf{R}(\mathbf{k})$
Pokud proměnné Kalmanovo zesílení konverguje k jisté hodnotě poté $P(t) \rightarrow P$ a
$K(t) \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{k}) + \mathbf{N^T P N})^{-1} \mathbf{N^T P M}$
**Tímto získáváme neměnný LQ regulátor, který je vlastně stavová zpětná vazba**




Obrázek 3: LQ regulátor

# 2 Algebraická Riccatiho rovnice a její řešení

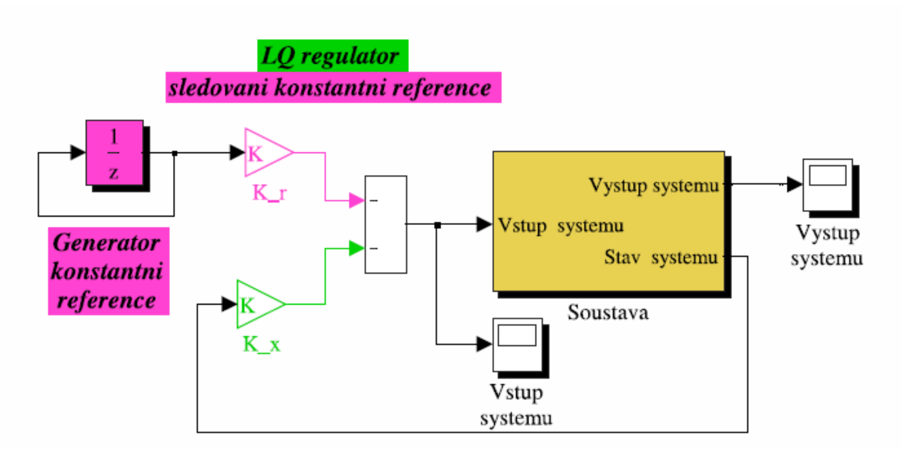
Předpokládáme LTI systém s konstantními maticemi kritéria, průběh řešení Ricattiho rovnice (iterujeme zpětně v čase). Pokud limitní řešení diferenční Ricattiho rovnice existuje pak vyhovuje řešení algebraické Ricattiho rovnice. Algebraické řešení ovšem může mít více řešení, které nejsou reálná, symetrická, pozitivně definitní a ty nevyhovují! Podmínka: $P \geq 0, P(t) \rightarrow P$
Tedy pokud posloupnost konverguje pak limitní hodnota spňuje podmínku.
Způsoby řešení ARE:

- Iterační metoda, zpětně v čase
- Kleimanův algoritmus
- Algoritmus využívající Hamiltonovy matice

# 3 Kvadraticky optimální sledování

úloha LQ regulace - aby stav přešel do nuly $x(t) \rightarrow 0$
úloha LQ programové řízení - referenční trajektorie je dána jako funkce času, je známa předem (dávkové procesy v chemickém průmyslu)

$$u(k) = -\left(Kx\ Kr\right)\begin{pmatrix} x(k) \\ x_r(k) \end{pmatrix} = -Kx'(k) \tag{9}$$




Obrázek 4: LQ regulátor - sledování reference

# 4 Frekvenční vlastnosti LQ regulátorů (spojitý, diskrétní)

**Diskrétní LQ**
Amplitudová a fázová bezpečnost – SISO systém, frekvenční charakteristika se vyhýbá kružnici $S = -1, r = \gamma$ je tudíž velmi robustní!
Kruhové kritérium:

- Amplitudová bezpečnost – $\left\langle \frac{1}{1+\gamma}, \frac{1}{1-\gamma} \right\rangle$
- Fázová bezpečnost – $\phi = 2arcsin\frac{\gamma}{2}$

Chang-Letovova věta - podobnost s metodou GMK, vychází z rovnice pro zpětnou diferenci a má tvar $\Delta_{cl}(z)\Delta_{cl}(z^{-1})$, charakteristický polynom $\Delta_{cl}$ stabilní (stabilní póly)

**Spojitý LQ**
Amplitudová a fázová bezpečnost – SISO systém, frekvenční charakteristika se vyhýbá kružnici $S = -1, r = 1$ je tudíž velmi robustní!
Kruhové (Nyquistovo) kritérium:

- Amplitudová bezpečnost – $\left\langle \frac{1}{2}, \infty \right\rangle$
- Fázová bezpečnost – $\phi = 60°$

Chang-Letovova věta - podobnost s metodou GMK, vychází z rovnice pro zpětnou diferenci a má tvar $\Delta_{cl}(-s)\Delta_{cl}(s)$, charakteristický polynom $\Delta_{cl}$ stabilní (stabilní póly)

# 5 Prediktivní a zpětnovazební strategie řízení, prediktivní regulátor

Strategie kvadraticky optimálního řízení jsou:

- zpětnovazební strategie – návrh zákona rízení $K(t), t = 0, ..., N-1$, bere v úvahu i budoucí dostupnou informaci $u(t) = -K(t)x(t)$, ale **nelze** jednoduše zahrnout omezení.
- prediktivní strategie – přímý návrh řídicí posloupnosti $u(t), t = 0, ..., N-1$, **lze zahrnout omezení**, ale nebere v úvahu budoucí dostupnou informaci $u(t) = f_t(x(0))$

**Preditkivní řízení:**
**Na základě vnějšího popisu:**
Dynamický systém popsán:

$$y(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(t-i) + \sum_{i=0}^{n} d_i v(t-i) \tag{10}$$

$v(t)$ – měřitelná porucha hledáme řídicí posloupnost na horizontu predikce $T_p$, minimalizující kritérium ve tvaru:

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ q(t)[y(t) - y_r(t)^2] + r(t)y(t)^2 \right\} \tag{11}$$

alternativně lze vážit přírůstek řízení $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$ – integrační charakter
Kritérium lze zapsat do maticové formy:

$$J = (y - y_r)\mathbf{Q}(y - y_r) + u^T \mathbf{R} u \tag{12}$$

Opět jako v případě LQ regulátoru hodnota kritéria vyjádřena kvadratickou formou

$$J = (A_p^{-1}B_pu + A_p^{-1}s - y_r)^T\mathbf{Q}(A_p^{-1}B_pu + A_p^{-1}s - y_r) + u^T\mathbf{R}u \tag{13}$$

a opět se používá minimalizace doplněním na úplný čtverec vzhledem k řízení $u$
**Nabízí se dvě varianty výpočtu prediktivního regulátoru:**

- Analytické řešení (bez omezení) – optimální řídicí posloupnost se rozloží po složkáach a aplikuje se klouzavý horizont (přepočtení celého horizontu, dosazení první hodnoty do zákona řízení a znovou přepočítání celého horizontu, toto se cyklicky opakuje)

- Numerické řešení (s omezením) – úloha kvadratického programování, bere v úvahu omezení. Používá se funkce MATLABu, QuadProg, řešící na základě omezení a vypočítává jádro kvadratické formy dle Hessovy matice.

Stabilizace – dostatečně dlouhý horizont predikce, omezení na koncový stav $x(T) = x(T-1)$ váha na koncový stav konverguje k nekonečnu.
**Na základě vnitřního popisu:**
Vnější popis ve tvaru: $x(t+1) = Ax(x) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(x) + Du(t)$ hledáme řídicí posloupnost na horizontu predikce $T_p$, minimalizující kritérium ve tvaru:

$$J = \sum_{t=0}^{T-1} \left\{ q(t)[y(t) - y_r(t)^2] + r(t)y(t)^2 \right\} \tag{14}$$

odezva systému:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ . \\ . \\ y(T-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ . \\ . \\ CA^{(T-1)} \end{bmatrix} + x_0 + \begin{bmatrix} D & & & \\ CB & D & & \\ . & & & \\ . & & & \\ CA^{(T-1)}B & & CB & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ . \\ . \\ u(T-1) \end{bmatrix} \tag{15}$$

neboli $y = \tilde{y} + Su$, kde hodnota kritéria

$$J = (\tilde{y} + Su - y_r)^T\mathbf{Q}(\tilde{y} + Su - y_r) + u^T\mathbf{R}u \tag{16}$$

Doplněním na úplný čtverec získáváme optimální řídicí posloupnost:

$$u = -(S^TQS + R)^{-1}S^T(\tilde{y} - y_r) = -Mx(0) + N_ry_r \tag{17}$$

Robustifikace MPC - kritérium typu nerovnosti

- Řízení na "'set point"'

- Řízení na "'set range"', kritérium s omezením $y_r^{LOW}(t) \leq z(t) \leq y_r^{HIGH}(t)$ - úloha QP

- Potlačení VF složky vstupu

- tvarování odezvy v časové oblasti (trychtýř) pro požadovanou odezvu (např. stabilizace tlaku), neinteraguje s ladícími parametry $Q$ a $R$, stabilní odezva pří proměnné dynamice i vahách

# 6 Nestrukturovaná neurčitost, analýza robustní stability

Nestruktourovaná neurčitost je vlastně zanedbaná resp. nepřesně známá dynamika na vysokých frekvencích. Lze popsat multiplikativním, aditivním a zpětnovazebním modelem.

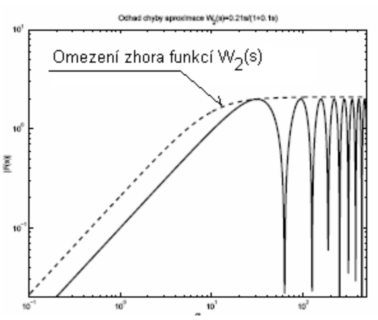
**Multiplikativní neurčitost:**

$$P = (1 + \Delta W_2)P_0, \ , \left|\frac{P(j\omega)}{P_0(j\omega)}\right| < |W_2(j\omega)| \ pro \ \forall\omega \tag{18}$$

$P_0 \ldots$ nominální model,
$P \ldots$ skutenčný (perturbovaný) model,
$W_2 \ldots$ váhová matice (profil maximální neurčitosti),
$\Delta \ldots$ neznámá hodnota o skutečné hodnotě a fázi perturbace
Podmínky:

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1 \ tj. \ \|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1 \ pro \ \forall\omega \tag{19}$$

Názorný příklad: dopravník s proměnným dopravním zpožděním má dán přenos: $P(s) = \frac{1}{s(1+sT)} \exp^{-T_d s}$, aproximace nominálním modelem (zanedbané dopravní zpoždění) $P_0(s) = \frac{1}{s(1+sT)}$ použitím vztahu 18 dostáváme $\left|\frac{P(s)}{P_0(s)}\right| = \left|\exp^{-T_d s} - 1\right| \leq |W_2(s)|$ Váhovou funkci $W_2$ musíme zvolit takovou abychom zhora omezili neurčitost.




Obrázek 5: Příklad dopravníku s proměnným Td - multiplikativní model

Důležitým faktem při vyšetřování neurčitosti je nutnost rozlišovat směr vstup/výstup a to pro MIMO systémy (pro SISO nezávisí na pořadí). $P = (1+\Delta W_2)P_0$ vs. $P = P_0(1+\Delta W_2)$ .

**Aditivní neurčitost:**

$$P = P_0 + \Delta W_2 \ , |P(j\omega) - P_0(j\omega)| < |W_2(j\omega| \ , \ kde \ \|\Delta\|_\infty \leq 1 \tag{20}$$

**Zpětnovazební neurčitost:**

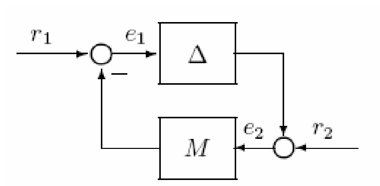
$$P = \frac{P_0}{1 + \Delta W_2 P_0} \ , \ kde \ \|\Delta\|_\infty \leq 1 \tag{21}$$

**Robustnost** Popis neurčitosti definuje množinu perturbovaných soustav $P$ jak pro aditivní 20 tak pro multiplikativní model 18.
Zajímá nás:

- robustní stabilita – regulátor zajišťuje vnitřní stabilitu pro všechny soustavy, které jsou popsány modelem neurčitosti $P$
- robustní kvalita regulace – regulátor splňuje požadavky na kvlaitu regulace pro soustavy, které jsou popsány modelem neurčitosti $P$

*Poznámka: Zjednodušený pohled na věc: Robustnost = neurčitost + citlivostní funkce*

**Základní větou robustní stability je Věta o malém zesílení:**
Nechť $\Delta$ a $M$ jsou stabilní přenosy. Zpětnovazební systém s přenosem $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ je stabilní tehdy a jen tehdy, když $\|M\|_\infty < 1$




Obrázek 6: Ilustrace věty o malém zesílení

Vysvětlení: (graficky) Nyqusitova křivka neobkličuje kritický bod a tím pádem je systém dle Nyquistova kritéria stabilní. (numericky) $L = \frac{1}{1+L}$ výraz ve jmenovateli zlomku nikdy nebude nulový.
**Kritéria robustní stability:**

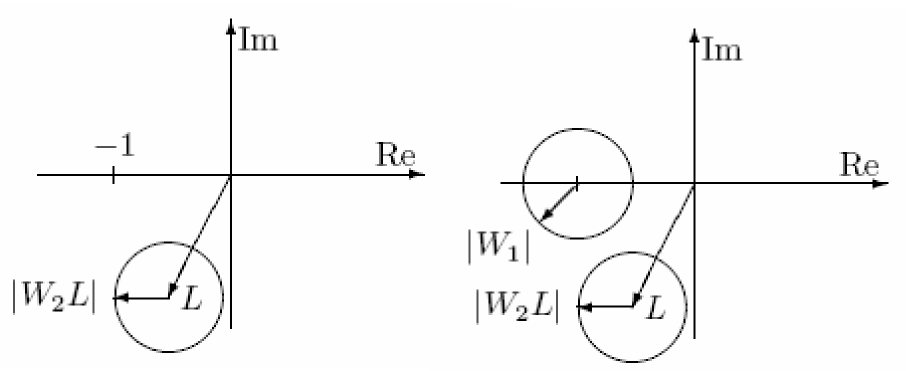
- aditivní model – $\|W_2CS\|_\infty < 1$
- multiplikativní model – $\|W_2T\|_\infty < 1$
- zpětnovazební model – $\|W_2P_0S\|_\infty < 1$

*Důkaz : Dosazení nominálních modelů do citlivostní funkce.*

**Robustní kvalita řízení:**
nominální kvalita řízení (citlivostní funkce) + robustní stabilita
$\|W_1S\|_\infty < 1$ a současně $\|W_2T\|_\infty < 1$

**Nutná a postačující podmínka robustní kvalitiy řízení:** $\||W_1S| + |W_2T|\|_\infty < 1$ , musíme si uvědomit že $S + T = 1$
Vše podstatné ohledně robustnosti vystihuje grafická interpretace:

K obrázku (a) $L$ je komplexní číslo a je zobrazeno v komplexní rovině (frekvenční charakteristice) $W_2$ vymezuje okolí ve kterém může vlivem perutbací L "'změnit"' polohu v této charaktersitice. Cílem je aby se s rostoucí frekvencí nedostalo do krického bodu




Obrázek 7: Grafická interpretace (a) robustní stabilita (b) robustní kvalita řízení

$-1 + j0$.

K obrázku (b) $L$ je komplexní číslo a je zobrazeno v komplexní rovině (frekvenční charakteristice) $W_2$ vymezuje okolí ve kterém může vlivem perutbací L "'změnit"' polohu v této charaktersitice. Cílem je aby se s rostoucí frekvencí "'vzájemně neprotly "' tyto dvě kružnice. To by mělo za následek singularitu v přenosu uzavřené smyčky.

# Reference


[1] HAVLENA, V. (1999). *Moderní teorie řízení – Doplňkové skriptum*. Vydavatelství ČVUT, Praha.

[2] HAVLENA, V. (2007). *Moderní teorie řízení – Slide*. ČVUT, Praha.

[3] ROUBAL, J.; PEKAŘ, J. *Moderní teorie řízení* [online]. Poslední revize 2003-07-01 [cit. 2003-07-01], ⟨http://dce.felk.cvut.cz/mtr/⟩.