

Lineární stochastický systém a jeho vlastnosti. Kovarianční funkce, výkonová spektrální hustota, spektrální faktorizace, tvarovací filtr šumu, bělicí filtr. Kalmanův filtr, formulace problému, vlastnosti. LQG regulátor, separační princip. Metoda "Loop Transfer Recovery".

Otázka pokrývá partie předmětu **X35MTR**. Tato otázka je vypracována dle [1], [2], [3] a zápisek z přednášek.

Obsah

1	Lineární stochastický systém a jeho vlastnosti	1
2	Kovarianční funkce, výkonová spektrální hustota, spektrální faktorizace, tvarovací filtr šumu, bělicí filtr	2
3	Kalmanův filtr, formulace problému, vlastnosti	4
4	LQG regulátor, separační princip	6
5	Metoda Loop Transfer Recovery	8

1 Lineární stochastický systém a jeho vlastnosti

Deterministický systém popsáný

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2)$$

rozšíříme o šum procesu $v(t)$ resp. měření $e(t)$, v základních úvahách vycházíme z faktu, že se jedná o tzv. *bílý šum*. Jeho parametry jsou následující:

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} v(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \right\} = 0, \varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} v(t_1) \\ e(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t_2) \\ e(t_2) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & S \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2), \quad (3)$$

U stochastického procesu nás zajímá vývoj stavu a výstupu. Ten popisujeme vývojem střední hodnoty.

$$\mu_x(t+1) = A\mu_x(t) + Bu(t) \quad (4)$$

$$\mu_y(t) = C\mu_x(t) + Du(t) \quad (5)$$

kovarianční matici stavu lze zapsat jako $P_x = \varepsilon \{ \tilde{x}\tilde{x}^T \}$, kde $\tilde{x} = x(t) - \mu_x(t)$. Odhad stavu \tilde{x} vlastně udává rozdíl skutečné hodnoty od střední hodnoty. Jinak řečeno pokud je *nejlepší situace* nastává pokud je hodnota kovarianční matice nízká ideálně nulová, poté je odhad stavu *přesný*, tudíž rozdíl střední hodnoty stavu a skutečné hodnoty stavu je nulový.

Odvozováním lze dospět k následujícím rovnicím (rovnice pro odchylky), které nám udávají stochastické veličiny (deterministická složka zde není resp. stření hodnota je nulová – nemá cenu jí odhadovat jelikož jí známe)

$$\mu_x(t+1) = A\mu_x(t) + v(t) \quad (6)$$

$$\mu_y(t) = C\mu_x(t) + e(t) \quad (7)$$

Dále kovarianční matice mají tvar:

$$\varepsilon \left\{ \tilde{x}(t+1)\tilde{x}^T(t+1) \right\} = AP_x(t)A^T + Q \quad (8)$$

$$\varepsilon \left\{ \tilde{x}(t+1)\tilde{y}^T(t) \right\} = AP_x(t)C^T + S \quad (9)$$

$$\varepsilon \left\{ \tilde{y}(t)\tilde{y}^T(t) \right\} = CP_x(t)C^T + R \quad (10)$$

$$(11)$$

Dále je možné odvodit sdružené kovarianční matice stavu a výstupu. Tato odvození mají zásadní vliv pro odvození Kalmanova filtru.

$$\text{cov} \left\{ \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} AP_x(t)A^T + Q & AP_x(t)C^T + S \\ CP_x(t)A^T + S^T & CP_x(t)C^T + R \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2), \quad (12)$$

Dále je možné určit rekurzivní rovnice, které mají tvar:

$$\mu_x(t) = A^t\mu_x(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1}Bu(\tau) \quad (13)$$

$$P_x(t) = A^tP_x(0)(A^T)^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} A^\tau Q(A^T)^\tau \quad (14)$$

Předpokladem je že matice A je stabilní, poté řady konvergují k limitní hodnotě

$$P_x = \lim_{t \rightarrow \infty} P_x(t).$$

Rovnice souvisí s Ljapunovou rovnicí pro ustálené řešení:

$$P_x = AP_x(t)A^T + Q$$

s kovariancí výstupu

$$P_y = CP_x(t)C^T + R.$$

2 Kovarianční funkce, výkonová spektrální hustota, spektrální faktorizace, tvarovací filtr šumu, bělicí filtr

Kovarianční funkce: K popisu stochastických signálů se obecně používají tzv. momenty (obecné, centrální a normované). Někdy se nazývají též charakteristické funkce. Udávají informaci o rozdělení náhodné veličiny.

Kovariance (obecný moment) je střední hodnota součtu odchylek obou náhodných veličin X, Y . Kovariance vlastně poskytuje informaci o intenzitě vztahu mezi dvěma veličinami -

vzájemná koerlační funkce, pokud se jedná o jednu veličinu poté hovoříme o autokorelační funkci.

$$\text{cov}(X, Y) = \varepsilon[X - \varepsilon(X)][Y - \varepsilon(Y)] \quad (15)$$

Je-li náhodný vektor n-rozměrný, poté se používá kovarianční matice, kde na diagonále jsou rozptyly jednotlivých veličin. Tato matice je symetrická!

$$C = \begin{bmatrix} D(X_1) & C(X_1, X_2) & \dots & C(X_1, X_n) \\ D(X_2, X_1) & D(X_2) & \dots & C(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(X_n, X_1) & C(X_n, X_2) & \dots & D(X_n) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Výkonová spektrální hustota:

Spektrální hustotu lze definovat jako Fourierovu transformaci kovarianční funkce (posloupnosti). Jedná se o měřítko výkonu procesu. Hodnotu výkonové spektrální hustoty $S_{uu}(\omega)$ v bodě ω lze chápat jako hustotu výkonu vstupního procesu v okolí frekvence ω .

$$\frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} S_{uu} d\omega = R_{uu}(0) = \sigma_u^2 = \varepsilon \{u^2(t)\} \quad (17)$$

Důležitým vztahem je vzájemná kovarianční funkce vstupu a výstupu:

$$R_{yu}(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} g(\tau) R_{uu}(t - \tau) = g * R_{uu} \quad (18)$$

odovídající konvoluci autokovarianční funkcí vstupu a impulzní charakteristiky. Platí vztah $R_{yu}(t) = G * R_{uu} \rightarrow S_{yu}(z) = G(z) * R_{uu}(z)$. Vztahy pro vzájemnou kovarianční funkci a vzájemnou spektrální hustotu umožňují identifikovat impulzní charakteristiku a přenos dynamického systému. Vzájemná kovarianční funkce je přímo rovna impulzní charakteristice systému a vzájemná spektrální hustota je rovna jeho frekvenčnímu přenosu!

Spektrální faktorizace:

Jelikož kovarianční funkce a tedy i spektrální vlastnosti náhodného procesu závisí jen na odchylkách od střední hodnoty, tak lze uvažovat, že deterministická složka je nulová. Tudiž, vstup je nulový a za vstup lze považovat pouze bílý šum. Tímto dochází ke zjednodušení. Přenos mezi výstupem a vstupem lze psát jako:

$$G(z) = [C(zI - A)^{-1}I] \quad (19)$$

spektrální hustota vstupu je dána kovarianční maticí

$$S_{uu}(z) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dosažením za vstup dostáváme

$$S_{yu}(z) = [C(zI - A)^{-1}I] \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \quad (21)$$

obdobně lze odvodit S_{uy} a S_{yy} . Uvažujeme-li nekorelované (nezávislé) bílé šumy $u(t), v(t)$ pak lze psát:

$$S_{yy}(z) = C(zI - A)^{-1}Q(z^{-1}I - A)^{-T}C^T + R \quad (22)$$

Tvarovací filtr šumu

Tento filtr souvisí se stochastickými vlastnostmi Kalmanova filtru, uvažujeme-li model ve tvaru:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \quad (23)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t) \quad (24)$$

s nekorelovanými, bílými šumy. Pak s využitím principu ortogonalit a faktorizací pozitivně definitní matice dostáváme inovační posloupnost procesu $y(t)$. Poté lze přepsat Kalmanův filtr do tvaru:

$$\hat{x}(t+1) = (A\hat{x}(t|t-1) + L(t)\epsilon(t|t-1)) \quad (25)$$

$$y(t) = C\hat{x}(t|t-1) + \epsilon(t|t-1) \quad (26)$$

nahražením chyb predikce inovacemi dostaneme

$$\hat{x}(t+1) = (A\hat{x}(t|t-1) + L(t)\Gamma_\epsilon(t)v(t)) \quad (27)$$

$$y(t) = C\hat{x}(t|t-1) + \Gamma_\epsilon(t)v(t) \quad (28)$$

což je inovační model procesu $y(t)$ tedy model, jehož vstupem je bílá posloupnost $v(t)$ a výstupem proces $y(t)$. Tento model nazýváme jako tvarovací filtr šumu $y(t)$. Inovace jsou vlastně jen "dekorelované" chyby predikce což je podstatná věc!

Bělicí filtr

Model jehož vstupem je proces $y(t)$ a výstupem je bílá posloupnost $v(t)$ nazýváme bělicí filtr pro proces $y(t)$. Postup odvození tohoto filtru je takový, že z rovnic Kalmanova filtru hodnotu chyb predikce a dostáváme:

$$\hat{x}(t+1) = (A - L(t)C)\hat{x}(t|t-1) + L(t)y(t) \quad (29)$$

$$\epsilon(t|t-1) = -C\hat{x}(t|t-1) + y(t) \quad (30)$$

a po přepočtu chyby predikce na inovace:

$$\hat{x}(t+1) = (A - L(t)C)\hat{x}(t|t-1) + L(t)y(t) \quad (31)$$

$$v(t) = -\Gamma_\epsilon^{-1}(t)C\hat{x}(t|t-1) + \Gamma_\epsilon^{-1}(t)y(t) \quad (32)$$

3 Kalmanův filtr, formulace problému, vlastnosti

Kalmanův filtr odhaduje stavy systému na základě pozorování vstupů a výstupů. V deterministické formulaci se k odhadování stavů používá pozorovatel stavu metodou umístování pólů. Ve stochastické formulaci se k odhadu stavů využívají kritéria MS resp. LMS.

Kalmanův filtr je algoritmus generující posloupnost odhadů stavů $\hat{x}(k|k)$ a koariančních matic chyb odhadu $P(k|k)$, přičemž v každém kroku minimalizuje kritérium $J_{LMS} = \text{trace } P(k|k)$.

Stochastický systém - lineární, diskretní, pozorovatelný

$$x(t+1) = Ax(x) + Bu(t) + v(t) \quad (33)$$

$$y(t) = Cx(x) + Du(t) + e(t) \quad (34)$$

kde šumy $v(t), e(t)$ bereme jako diskrétní bílé posloupnosti s nulovou střední hodnotou

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} v(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (35)$$

a se známou kovarianční maticí

$$\varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} v(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \right\} = 0, \varepsilon \left\{ \begin{bmatrix} v(t_1) \\ e(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t_2) \\ e(t_2) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2), \quad (36)$$

matice Q představuje šum stavu $v(k)$ a matice R představuje šum řízení $e(k)$. Matice S udává vzájemný šum (korelace mezi šumem stavu a řízení). Pro nekorelované šumy je matice $S = 0$. Dosazením $\hat{x}(k+1|k-1), \hat{y}(k|k-1)$ do rovnice popisující systém dostáváme Riccattioho rovnici, představující algoritmus Kalmanova filtru.

$$P(k+1|k-1) = [MP(k|k-1)M^T + Q] - [MP(k|k-1)C^T] [CP(k|k-1)C^T + R]^{-1} [CP(k|k-1)C^T] \quad (37)$$

Tuto rovnici je výhodné rozdělit do dvou nezávislých kroků.

Datový (filtrační) krok:

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + L'(k)\varepsilon(k|k-1) \quad (38)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - L'(k)CP(k|k-1) \quad (39)$$

$$\varepsilon(k|k-1) = y(k) - C\hat{x}(k|k-1) - Du(k) \quad (40)$$

$$L'(k) = P(k|k-1)C^T [CP(k|k-1)C^T + R]^{-1} \quad (41)$$

Časový (predikční) krok: – vztahuje se přímo k systému

$$\hat{x}(k+1|k) = M\hat{x}(k|k) + Nu(k) \quad (42)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - L'(k)CP(k|k-1) \quad (43)$$

$$P(k+1|k) = MP(k|k)M^T + Q \quad (44)$$

Celkové zesílení Kalmanova filtru lze popsat jako odhad stavu $x(k|k-1)$ časovým krokem a na základě měření výstupu $y(k)$ datovým krokem upřesnit stav $x(k|k)$.

Ladění KF se provádí volbou kovariančních matic Q, R . Obecně se zvyšuje poměr těchto matic, jelikož při současném zvýšení resp. snížení obou matic se nic neděje (kompenzují se). Při snížení poměru Q/R říkáme, že věřím stavům systému naopak při zvyšování poměru věřím více výstupu.

Vlastní čísla matice $A - L(t)C$: Při snižování zesílení L se vlastní čísla pohybují od stabilních pólů ke stabilním nulám (Chang-Letova věta).

Matice P : je kovarianční matice chyb odhadu. Jejím nastavením v počáteční fázi $P(0)$ určujeme nakolik věříme modelu, měření popřípadě jejich kovariancím. Pokud věřím modelu (stavům), dám malou hodnotu $P(0)$, což zajistí velký rozptyl, jelikož šum znamená velký rozptyl.

4 LQG regulátor, separační princip

Regulátor LQG lze použít na stochastický systém popsaný následujícím vztahem

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v(t), \quad x(0) \approx N(\hat{x}(0), P_x(0)) \quad (45)$$

$$(46)$$

Je možné vycházet ze dvou přístupů ; je možné měřit stavy systému jako zpětná vazba od stavu, nebo je rekonstruovat z měřeného výstupu pomocí Kalmanova filtru jako zpětnou vazbu od výstupu.

Zpětná vazba od stavu – stochastický systém:

Využíváme rozkladu stavu na střední hodnotu $x = \hat{x} + \tilde{x}$. Poté lze střední hodnotu kvadratické formy $x^T Q x$ vyjádřit jako:

$$E \{x^T Q x\} = E \{(\hat{x} + \tilde{x})^T Q (\hat{x} + \tilde{x})\} = E \{\hat{x}^T Q \hat{x}\} + E \{\tilde{x}^T Q \tilde{x}\} = \hat{x}^T Q \hat{x} + E \{trace \tilde{x} \tilde{x}^T Q\} = \tilde{x}^T Q \tilde{x} + trace \tilde{x} \tilde{x}^T Q \quad (47)$$

Výsledek této úpravy ukazuje na to, že střední hodnota kvadratického kritéria je oproti deterministické formulaci posunuta o vliv šumu, který je dán právě stopou matice. Tudíž, rozepíšeme-li ztrátovou funkci je tento posun zřejmý:

$$V^*(x(t), t) = x^T P x + \sum_{k=t+1}^N trace Q_v P(k) \quad (48)$$

$$J^* = V^*(x(0), 0) = x(0)^T P(0) x(0) + \sum_{t+1}^N trace Q_v P(t), \quad (49)$$

kde matice $P(t)$ je řešení Ricattiho rovnice (totžné jako deterministické LQ řízení) a druhá část je vliv šumu procesu. První část rovnice představuje tedy optimální zákon řízení (podobný deterministické verzi) a druhý člen odpovídá nepredikované složce - šumu $v(t)$.

Zpětná vazba od výstupu – odhad stavů:

Tato část odpovídá formulaci Kalmanova filtru. Uvažujeme, že stavy systému jsou neměřitelné. K tomu abychom data odadli, využíváme dostupní minulá data D_{t-1} . Rekonstrukce stavu systému lze vyjádřit jako:

$$\hat{x}(t+1|t) = A\hat{x}(t|t-1) + Bu(t) + L\varepsilon(t|t-1), \quad \varepsilon(t|t-1) = y(t) - \hat{y}(t|t-1). \quad (50)$$

Stav Kalmanova filtru lze opět rozdělit na střední hodnotu \hat{x} a rozptyl \tilde{x} . Opět lze střední hodnotu kvadratické formy $x^T Q x$ lze vypočítat jako:

$$E \{x^T Q x\} = \tilde{x}^T(t|t-1) Q \tilde{x}(t|t-1) + trace P_x(t|t-1) Q \quad (51)$$

V následujícím vztahu je vidět člen D_{t-1} , představující používání dostupných dat výstupu, u klasické zpětné vazby je zde šlen $x(t)$

$$V^*(t) = \min_{u(t)} E \left\{ x(t)^T Q(t) x(t) + u(t)^T R(t) u(t) + V^*(t+1|u(t), D_{t-1}) \right\} \quad (52)$$

Dále lze určit hodnotu kritéria a ztrátové funkce jako:

$$V^*(x(t), t) = \tilde{x}(t|t-1)^T P(t) \tilde{x}(t|t-1) + \sum_{k=t+1}^N trace L Q_\varepsilon L^T P(k) + \sum_{k=t+1}^N trace P_x(k|k-1) Q(t) \quad (53)$$

kde prostřední člen rovnice představuje vliv stochastické složky systému (šum procesu) a poslední člen pak vliv odhadu namísto přímého měření.

Následující rovnice představuje optimální hodnotu kritéria:

$$J^* = V^*(x(0), 0) = \tilde{x}(0| -1)^T P(0) \tilde{x}(0| -1) + \sum_{t=1}^N \text{trace } L Q_\varepsilon L^T P(k) + \sum_{t=0}^{N-1} \text{trace } P_x(t|t-1) Q(t) \quad (54)$$

LQG regulátor - separační princip:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + v(t) \quad (55)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + e(t) \quad (56)$$

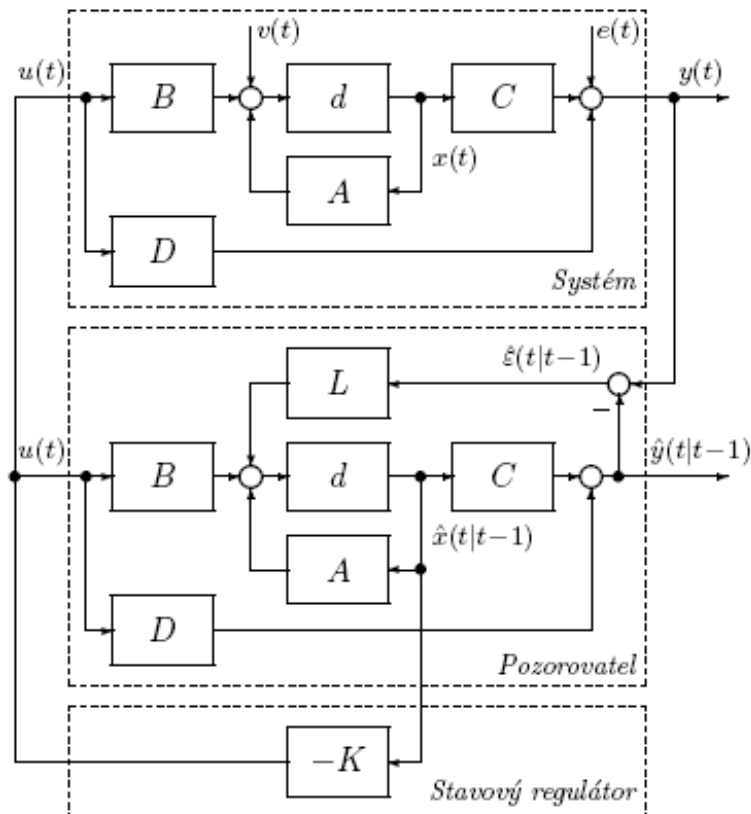
$$\hat{x}(t+1|t) = A\hat{x}(t|t-1) + Bu(t) + L\varepsilon(t|t-1) \quad (57)$$

$$\hat{y}(t|t-1) = C\hat{x}(t|t-1) + Du(t) \quad (58)$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t|t-1) \quad (59)$$

$$\varepsilon(t|t-1) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) \quad (60)$$

Uspořádání LQG regulátoru:



Obrázek 1: Blokové schéma LQG regulátoru

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ \hat{x}(t+1|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t|t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(t) \\ v(t) - Le(t) \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$\hat{x}(t|t-1) - x(t) - \hat{x}(t|t-1) \quad (62)$$

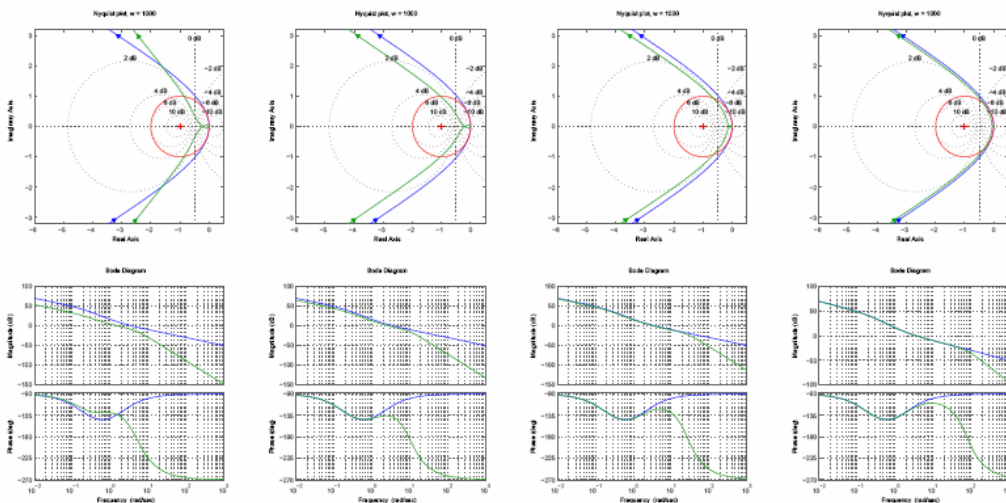
Separční princip:
vlastní čísla uzavřené smyčky:

- A-BK - kvadraticky optimální regulátor
- A-LC - Kalmanův filtr

5 Metoda Loop Transfer Recovery

Předpoklad je že systém je minimálně fázový (nemá nestabilní nuly). Jelikož LQG regulátor představuje kombinaci LQ a KF, pak se dá předpokládat interakce vlastností těchto systémů. Rozdílné integrální vlastnosti těchto systémů mají za následek, že se na vyšších frekvencích rozcházejí jejich vlastnosti (LQ regulátor má relativní řád 1, KF má relativní řád 2, tedy konvergence je možná do jisté frekvence. Tento předpoklad vychází z citlivostní funkce.

LQ regulátor je velmi robustní, ovšem Kalmanův filtr již tak robustní není. Proto se snažíme přiblížit vlastnostem otevřené smyčky LQ regulátoru a to volbou parametru ρ resp. $Q = Q_0 + \rho B^T B$. Pro rostoucí hodnotu ρ konverguje přenos otevřené smyčky $L^{LQG}(s) \rightarrow L^{LQ}(s)$. Tento fakt ilustruje následující obrázek:



Obrázek 2: Princip Loop Transfer Recovery

S rostoucí hodnotou $\rho = 0, 10, 1000, 10000$ dochází k ”vytlačování” křivky z jednotkové kružnice a tím pádem ke zlepšení frekvenčních vlastností LQG regulátoru.

Reference

- [1] HAVLENA, V. (1999). *Moderní teorie řízení – Doplnkové skriptum*. Vydavatelství ČVUT, Praha.
- [2] HAVLENA, V. (2007). *Moderní teorie řízení – Slide*. ČVUT, Praha.
- [3] ROUBAL, J.; PEKAŘ, J. *Moderní teorie řízení* [online]. Poslední revize 2003-07-01 [cit. 2003-07-01], (<http://dce.felk.cvut.cz/mtr/>).