Vypracoval: **Miloslav Krajl**

Metody odhadování, MS a LMS odhad. ARX, ARMAX a OE model. Statistické metody identifikace, lineární a pseudolineární regrese. Adaptivní řízení, princip ekvivalence určitosti, opatrné a důvěřivé strategie řízeni, duální řízení.

Otázka pokrývá partie předmětu **X35MTR**. Tato otázka je vypracována dle [1], [2], [3] a zápisek z přednášek.

Obsah

1 Metody odhadování, MS a LMS odhad

Proč vlastně odhad? Náhodnou hodnotu narozdíl od deteministické hodnoty neznáme. Za náhodný vektor, jehož hodnotu chceme odhadnout považujeme x, měřitelná data, která obsahují informaci o x označíme y. A poté známe sdružené rozdělení $p(x, y)$.
Pro další výklad je nutné zavést značení:

$$\mu_x = \varepsilon\{x\} \tag{1}$$

$$\mu_y = \varepsilon\{y\} \tag{2}$$

$$P_{xx} = \varepsilon\left\{(x-\mu_x)(x-\mu_x)^T\right\} \tag{3}$$

$$P_{xy} = \varepsilon\left\{(x-\mu_x)(y-\mu_y)^T\right\} \tag{4}$$

$$P_{yy} = \varepsilon\left\{(y-\mu_y)(y-\mu_y)^T\right\} \tag{5}$$

MS odhad $\widehat{x}_{MS}(y)$ minimalizující střední kvadratickou chybu resp. minimalizuje kritérium ve tvaru

$$J_{MS} = \varepsilon\left\{(x-\widehat{x}_{MS}(y))^T(x-\widehat{x}_{MS}(y))\right\}, \tag{6}$$

Odvození spočívá v minimalizaci kritéria J_{MS} dvojitou integrací pomocí sdružené hustoty. Podmínka pro minimum vychází z parciální derivace hodnoty kritéria podle parciální derivace odhadu MS a pokládá se rovna nule. Řešení odpovídá podmíněné střední hodnotě $\widehat{x}_{MS}(y) = \varepsilon\{x|y\}$. Jelikož vyžaduje znalost sdružené hustoty pravděpodobnosti $p(x, y)$, v praxi se od tohoto odhadu upouští a je nahrazen následujícím *LMS* odhadem.
Princip ortogonality:
Nechť x, y mají sdružené rozdělení $p(x, y)$. Potom pro libovolnou funkci dat $g(y)$ platí

$$\varepsilon\left\{g(y)^T(x-\varepsilon\{x|y\})\right\} = 0 \tag{7}$$

chyba odhadu je ortogonální ke všem lineárním funkcím dostupných dat g_y Důkaz:

$$\varepsilon\left\{g(y)^T(x-\varepsilon\{x|y\})\right\} = trace\varepsilon\left\{g(y)(x-\varepsilon\{x|y\})^T\right\} = 0 \tag{8}$$

Důsledek: platí nerovnost

$$\varepsilon\ \{\|x-\varepsilon\{x|y)\|\} \leq \varepsilon\{\|x-g(y))\|\} \tag{9}$$

Euklidovská norma:

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} \tag{10}$$

MS odhad je nejlepší aproximace hodnoty x na základě dat y ve smyslu Euklidovské normy.

LMS odhad $\widehat{x}_{LMS}(y)$ lineární odhad minimalizující střední kvadratickou chybu resp. minimalizuje kritérium ve tvaru

$$J_{LMS} = \varepsilon\left\{(x-Ay-b))^T(x-Ay-b))\right\}, \tag{11}$$

kde řešení odpovídá

$$\widehat{x}_{LMS}(y) = \mu_x + P_{xy}P_{yy}^{-1}(y-\mu_y). \tag{12}$$

Oproti MS odhadu vyžaduje znalost pouze momentů 1. a 2. řádu. Hodnota kritéria se odvodí jako:

$$J_{LMS} = \varepsilon\left\{\tilde{x}\tilde{x}^T\right\} = trace\ \varepsilon\left\{\tilde{x}^T\tilde{x}\right\} = trace\varepsilon\left\{(x-Ay-b)(x-Ay-b)^T\right\} \tag{13}$$

minimum se určí podle vztahu derivace stopy matice. LMS odhad je ortogonální ke všem lineárním funkcím dat $g_{lin}(y) = Ay + b$

2 ARX, ARMAX a OE model

ARX model uvažujeme lineární diferenční rovnici, kterou doplníme stochastickým nebo chybovým členem:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + an0y(t-n_0 = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \ldots + e(t) \tag{14}$$

Tento zápis lze modifikovat pomocí polynomů jako:

$$a(d)y(t) = b(d)u(t) + e(t) \tag{15}$$

respektive

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)}u(t) + \frac{1}{a(d)}e(t) \tag{16}$$

Pokud takto popsaný systém má předem známé dopravní zpoždění pak lze psát zápis ve tvaru

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)}u(t - T_d) + \frac{1}{a(d)}e(t) \tag{17}$$

Je vidět, že přenos deterministické části může být zvolen libovolně, pak tvarovací filtr náhodné složky je implicitně definován jako jmenovatel přenosu determinstické části modelu. Přes toto omezení je ARX model velmi významný neboť predikovaná střední hodnota výstupu $\hat{y}(t|t-1)$ je lineární funkcí měřitelných dat. Tudíž k odhadu dat lze využít lineární regresi.
Definujeme vekotr parametrů:

$$\Theta = [a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, a_b, \cdots]^T \tag{18}$$

Definujeme vektor dat (regresor):

$$z(t) = [y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-n_a}, u_t, u_{t-1}, \cdots]^T \tag{19}$$

Poté závislost predikované střední hodnoty výstupu na parametrech lze vyjádřit jako:

$$\hat{y}(t|t-1) = z(t)^T\Theta = \Theta^T z(t). \tag{20}$$

ARMAX model ARX neumí modelovat stochastickou složku, tento nedostatek odstraňuje ARMAX model.

$$y(t)+a_1y(t-1)+\ldots+an0y(t-n_0 = b_0u(t)+b_1u(t-1)+\ldots+e(t)+e(t)+c_1e(t-1)+\ldots \tag{21}$$

Tento zápis lze modifikovat pomocí dodefionváním polynomu:

$$c(d) = 1 + c_1 d + \ldots + c_n d^n \tag{22}$$

Poté lze psát:

$$a(d)c(t) = b(d)u(t) + c(d)e(t), \tag{23}$$

nebo

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)}u(t) + \frac{c(d)}{a(d)}e(t) \tag{24}$$

Pokud takto popsaný systém má předem známé dopravní zpoždění pak lze psát zápis ve tvaru

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)}u(t - T_d) + \frac{c(d)}{a(d)}e(t) \tag{25}$$

ARMAX model je ekvivalentní popisu stochastického systému v pozorovatelném kanonickém tvaru a dovoluje tedy specifikovat vlastnosti jak deterministické tak i stochastické složky.

Definujeme-li opět parametry:

Definujeme vekotr parametrů:

$$\Theta = [a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, a_b, \cdots, c_1, c_2, \cdots]^T \tag{26}$$

Definujeme vektor dat (regresor):

$$z(t) = [y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-n_a}, u_t, u_{t-1}, \cdots, \epsilon(t-1|t-2), \cdots]^T, \tag{27}$$

kde ϵ vyjadřuje chybu predikce jako $\epsilon(t|t-1) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$.
Poté závislost predikované střední hodnoty výstupu na parametrech lze vyjádřit jako:

$$\hat{y}(t|t-1) = z(t)^T\Theta = \Theta^T z(t). \tag{28}$$

V tomto příadě, narozdíl od ARX modelu, nemůžeme mluvit o lineární regresi. Namísto toho mluvíme o pseudolineární regresi. Při použití této regrese k identifikaci ARMAX modelu se často používá použití aposteriorních chyb predikce $\epsilon(t|t)$.

OE model OE model – model s chybou výstupu. Jelikož je v mnoha případech vztah mezi vstupem a výstupem možné popsat lineární diferenční rovnicí a jediným zdrojem stochastické složky je chyba měření mající charakter bílého šume pak lze systém popsat jako:

$$x(t) + a_1 y(t-1) + \ldots + an0y(t - n_0 = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \ldots \tag{29}$$

$$y(t) = x(t) + e(t) \tag{30}$$

Vyjádřeno pomocí polynomů:

$$y(t) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) + e(t) \tag{31}$$

respektive

$$a(d)y(t) = b(d)u(t) + a(d)e(t) \tag{32}$$

Z tohoto zápisu je patrné, že ve stacionárním případě je ekvivalentní ARMAX modelu za předpokladu $c(d) = a(d)$.
Rovnice prediktoru

$$\hat{y}(t|t-1) = \frac{b(d)}{a(d)} u(t) \tag{33}$$

dostáváme

$$\hat{y}(t|t-1) = b(d)u(t) + [1 - a(d)]\, \hat{y}(t|t-1). \tag{34}$$

Hodnoty parametrů a obecný zápis lze psát ve tvaru:
Vekotr parametrů:

$$\Theta = [a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, \cdots]^T \tag{35}$$

Definujeme vektor dat (regresor):

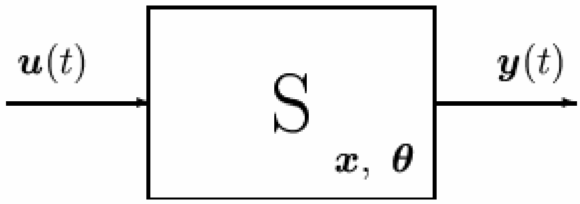
$$z(t) = [\hat{y}(t-1|t-2)\cdots, \hat{y}(t-n|t-n-1)u(t-1)\cdots]^T, \tag{36}$$

Závislost predikované střední hodnoty výstupu na parametrech lze vyjádřit jako:

$$\hat{y}(t|t-1) = z(t,\Theta)^T\Theta = \Theta^T z(t,\Theta). \tag{37}$$

3 Statistické metody identifikace, lineární a pseudolineární regrese

Motivací úlohy identifikace paramterl systému je obvykle úloha nalezení řízení (optimílního řízení). Uvažujeme dynamický systém, uvedený na následujícím obrázku; vstupem je $u(t)$ a výstupem $y(t)$. Daty rozumíme množinu vstupních a výstupních dat $D_{t0,0} = \{u_{t_0}, y_{t_0}, \cdots, u_t, y_t\}$.



Obrázek 1: Dynamický systém

Pro optimální řízení hledáme řídicí posloupnost, která minimalizuje jisté kritérium J na horizontu T konečné délky. K nalezení optimálního zákona řízení je tedy třeba určit rozdělení pravděpodobosti.
Soubor podmíněných hustot pravděpodobnosti $p(t(\tau)|u(\tau), D_{\tau-1})$, pro $\tau = t_0+1, \cdots, t_0+T$ popisuje závislost výstupu v čase τ na historii syst0mu v čase; tento soubor p.h.p nazveme model systému. Model tedy lze interpretovat jako prediktor hodnoty výstupu na základě známé historie systému a současného výstupu systému. Soubor podmíněných hustot pravděpodobnosti $p(u(\tau), D_{\tau-1})$ [1] popisuje závislost vstupu systému v čase τ na historii systému. Tato závislost je definována zákonem řízení.

Používané struktury prediktivní p.h.p

$$p(y(t)|u(t), D_{t-1}) = \int p(y(t)|u(t), D_{t-1})p(\Theta(t)|u(t), D_{t-1})d\Theta(t) \qquad (38)$$

$p(y(t)|u(t), D_{t-1}, \Theta(t)$ - struktura modelu
$p(y(t)|u(t), D_{t-1})$ - popis neurčitosti parametrů
$p(\Theta(t)|\Theta(t), D_t)$ - stochastický model vývoje modelu

- vnější popis lineárního stochastického systému
- matice impulzních charakteristik deterministického přenosu
- matice impulzních charakteristik tvarovacího filtru šumu

Lineární regrese - predikovaná střední hodnota výstupu je lineární funkcí měřitelných dat:

[1] Je vidět informační zpoždění v zákonu řízení

Definujeme vekotr parametrů:

$$\Theta = [a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, a_b, \cdots]^T \tag{39}$$

Definujeme vektor dat (regresor):

$$z(t) = [y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-n_a}, u_t, u_{t-1}, \cdots]^T \tag{40}$$

Poté závislost predikované střední hodnoty výstupu na parametrech lze vyjádřit jako:

$$\hat{y}(t|t-1) = z(t)^T\Theta = \Theta^T z(t). \tag{41}$$

- dovoluje specifikovat vlastnosti jak deterministické tak i stochastické složky
- ARMAX model je ekvivalentní popisu stochastického systému v pozorovatelném kanonickém tvaru

Pseudolineární regrese Definujeme vekotr parametrů:

$$\Theta = [a_1, a_2, \cdots, b_0, b_1, a_b, \cdots, c_1, c_2, \cdots]^T \tag{42}$$

Definujeme vektor dat (regresor):

$$z(t) = [y_{t-1}, y_{t-2}, \cdots, y_{t-n_a}, u_t, u_{t-1}, \cdots, \epsilon(t-1|t-2), \cdots]^T, \tag{43}$$

kde ϵ vyjadřuje chybu predikce jako $\epsilon(t|t-1) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$.
Poté závislost predikované střední hodnoty výstupu na parametrech lze vyjádřit jako:

$$\hat{y}(t|t-1) = z(t)^T\Theta = \Theta^T z(t). \tag{44}$$

- Při použití této regrese k identifikaci ARMAX modelu se často používá použití aposteriorních chyb predikce $\epsilon(t|t)$.
- Přibližná metoda, výpočetně jednoduchá, komplikovaná analýza
- Přesné rekurzivní odhadování parametrů ARMAX modelu není možné

4 Adaptivní řízení, princip ekvivalence určitosti, opatrné a důvěřivé strategie řízeni, duální řízení

Adaptivní řízení - přesná formulace problému popsáno pomocí duálního řízení

- dynamické programování
- hyperstav – odhad parametrů včetně neučitostí
- duální charakter vstupu (řízení x poznávání)

Aproximace metodou STC (Self Tuning Control) odstraňuje (zanedbává) duální charakter řízení

1. optimální odhad parametrů $\hat{\Theta}(t|t-1)$(metoda nejmenších čtverců, MS odhad využívající data D_{t-1}
2. model s neminimálním stavem $y(t) = z^T\Theta(.|.)$ (zanedbáváme neurčitost i časový vývoj parametrů)
3. kvadraticky optimální zákon řízení $u(t) = -K(t)z(t)$, minimalizuje kritérium pro deterministický systém, pomalé změny parametrů iterací rozprostřenou v čase (IST)

   Aproximace - jiné možné opatrné strategie, aktivní řízení

   Více informací možná v navazujícím předmětu Odhadování a filtrace

Reference

[1] Havlena, V. (1999). *Moderní teorie řízení – Doplňkové skriptum*. Vydavatelství ČVUT, Praha.

[2] Havlena, V. (2007). *Moderní teorie řízení – Slide*. ČVUT, Praha.

[3] Roubal, J.; Pekař, J. *Moderní teorie řízení* [online]. Poslední revize 2003-07-01 [cit. 2003-07-01], ⟨http://dce.felk.cvut.cz/mtr/⟩.