4. okruh z bloku KM1 - řídicí technika

Zpracoval: Ondřej Nývlt (o.nyvlt@post.cz)

Zadání:

Lineární programování (LP), simplexová metoda, dualita v LP. Nelineární programování. Vázaný extrém. Karush-Kuhn-Tuckerova věta, citlivost, dualita. Vícekriteriální optimalizace.

Předmět:

X35ORR

1. Lineární programování (LP):

- zdroje: slidové skriptum k X35ORR prof. Štecha

Charakteristika problému LP

- **Systémy (matematické modely)** jsou popsány soustavou lineárních rovnic a nerovnic
- **Kritérium optimalizace** těchto systémů je také lineární
- Proměnné v těchto systémech leží v určitých mezích

Typické problémy vedoucí na LP:

- **Optimální výrobní program**
  Vyrábíme n různých výrobků a každý požaduje m různých zdrojů (surovin). Na výrobu jednoho výrobku j-tého druhu potřebujeme a_{ij} jednotek i-tého zdroje. Zdroje jsou omezené a máme k dispozici b_i jednotek i-tého zdroje. Zisk při výrobě jednoho výrobku j-tého typu je c_j . Počty výrobků j-tého typu označíme x_j
  Problémem je vyrábět s maximálním ziskem, při respektování omezení zdrojů

  $$\max \{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0 \},$$

  kde $\boldsymbol{x}$ - vektor počtu výrobků, $\boldsymbol{c}$ - vektor zisků, $\boldsymbol{b}$ - vektor omezení zdrojů, $\boldsymbol{A}$ je matice spotřeby s prvky a_{ij}.
- **Směšovací problém**
  Máme n základních surovin. Úkolem je namíchat základní suroviny tak, aby výsledný výrobek měl předepsané složení a surovinové náklady byly minimální. Množství jednotek suroviny j-tého typu označíme x_j , její cena za jednotku je c_j . Požadované složení výsledného produktu je popsáno vektorem $\boldsymbol{b}$, jehož složky b_i jsou rovny požadovanému obsahu látky i ve výsledném produktu. Jednotkové množství základní suroviny j-tého typu obsahuje a_{ij} jednotek látky typu i.

  $$\min \{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0, \}$$

  kde matice $\boldsymbol{A}$ má prvky a_{ij} .
- **Dopravní problém**
- **Distribuční problém**

Ekvivalentní formy lineárních úloh:

- **Základní úloha**

  $$\min,\max \{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{x} \geq 0, \}$$

  - úloha na maximum či minimum
  - omezení jsou ve tvaru rovnosti i nerovností obou typů
  - proměnné jsou nezáporné
- **Standardní úloha**

$$\max \{c^T x : A_1 x \leq b_1, A_2 x \leq b_2, -A_2 x \leq -b_2, -A_3 x \leq -b_3, x \geq 0, \}$$

- úloha na maximum
- omezení ve tvaru nerovností jednoho typu
- proměnné jsou nezáporné

- **Kanonický tvar**

$$\max\{c^T x : A_1 x + u = b_1, A_2 x = b_2, A_3 x - v = b_3, x \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, \}$$

- úloha na maximum
- omezení ve tvaru rovností
- proměnné jsou nezáporné
- základ simplexové metody

- **Normální tvar**
  - úloha na maximum
  - omezení ve tvaru $Ax \leq b$,
  - nezáporné pravé strany omezení ($b \geq 0$)

Celočíselné programování – proměnné pouze celá čísla

- obecně NP-úplná
- řešení: backtracking, branch and bound alg., relaxace
- Speciální případy: celočíselné LP, binární LP

Řešení úloh LP

- **Grafické řešení**
  - Jednoduché řešení – vhodné jen pro 2 proměnné
  - Řešení v rovinně, proto problém s pouze 2 proměnnými
  - Množina X, určená lineárními omezeními ve tvaru $X = \{x|Ax \leq b\}$ je konvexní množina.
  - Lineární funkcionál definovaný na konvexní množině má optimum na hranici množiny.
- **Simplexová metoda**

Řešení

- **Přípustné řešení** - vektor x splňující omezení. Množinu přípustných řešení značíme X.
- **Optimální řešení** - přípustné řešení, které maximalizuje kritérium.

- *existuje* a je právě jedno
- *existuje* a je jich ∞ mnoho
- *neexistuje*
  - kolize v omezení (X je prázdná množina)
  - X je neomezená ve směru, ve kterém zisková (účelová) funkce roste.

2. Simplexová metoda:

- zdroje: slidové skriptum k X35ORR prof. Štecha; materiály pro 8. a 9. cvičení z předmětu X33SDU

- simplexová metoda prochází vrcholy konvexního útvaru/(polyedrické) množiny přípustných řešení vzniklé z omezení (extrém na hranici – testuje vrcholy a hledá maximum).

Řešení úloh LP pomocí simplexové metody je ukázáno na příkladu:

$$f(x) = 5x_1 + 8x_2 \rightarrow MAX,$$

$$3x_1 + 6x_2 \leq 1500,$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 800,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

- Prvním krokem simplexové metody je přepis úlohy do kanonického tvaru. Zavedením dalších proměnných x_3 a x_4, které nazýváme *doplňkovými*, dostaneme z nerovností rovnosti:

$$f(x) = 5x_1 + 8x_2 \rightarrow MAX,$$
$$3x_1 + 6x_2 + x_3 = 1500,$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_4 = 800,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

- Dalším krokem je tvorba tzv. *simplexové tabulky*, do které se zapisuje omezení a upravené kritérium (v tomto případ f(x) = -5 x_1 - 8 x_2):
  (x_3 a x_4 jsou nyní bázové proměnné)

x_1	x_2	x_3	x_4	***b***
3	**6**	1	0	1500
4	2	0	1	800
-5	-8	0	0	0 = f(x)

Simplexová tabulka popisuje v prvních dvou řádcích naše dvě omezení. Z prvního omezení plyne x_3 = 1500 - (3x_1 + 6x_2) a z druhého omezení zase plyne x_4 = 800 - (4x_1 + 2x_2). Odtud dostaneme základní řešení x_3 = 1500 a x_4 = 800 (ostatní proměnné jsou nulové x_1 = x_2 = 0). Poslední řádek vyjadřuje kritérium, které je nulové. Nyní musíme určit proměnnou (která odpovídá sloupci), pomocí které budeme rozvíjet řešení. Vybíráme tu proměnnou, která má nejnižší hodnotu v posledním řádku (účelové funkci) a vyskytuje se v účelové funkci (tato proměnná nejvíce zvýší hodnotu účelové funkce). Tímto postupem určíme tzv. *klíčový sloupec*, který v našem případ odpovídá proměnné x_2. Dále musíme určit tzv. *klíčový řádek*, kterým budeme ostatní řádky upravovat (respektive eliminovat) tak, abychom v ostatních řádcích dostali v klíčovém sloupci nulové hodnoty. Klíčový řádek je takový řádek, který má minimální podíl členů b_j/a_j pro všechny řádky omezení $j=1...m$, kde a_j symbolizuje prvek v klíčovém sloupci. V našem případ je klíčovým řádkem první řádek protože podíl *500/6 = 250* je menší, než podíl *800/2 = 400*, ve druhém řádku. Po úpravě řádků řádkem klíčovým dostaneme:

x_1	x_2	x_3	x_4	***b***
1/2	1	1/6	0	250
3	0	-1/3	1	300
-1	0	4/3	0	2000 = f(x)

Z upravené simplexové tabulky lze přečíst řešení (ve tvaru $x^* = [x_1, x_2, x_3, x_4]$)
$x^* = [0, 250, 0, 300]$, které ještě není optimální, protože v posledním řádku se vyskytuje záporná hodnota v prvním sloupci tabulky. Obdobně tedy provedeme ještě jednu iteraci, tentokrát klíčový sloupec je sloupec odpovídající proměnné x_1, klíčový řádek bude druhý řádek. Po provedení další úpravy dostaneme:

x_1	x_2	x_3	x_4	***b***
0	1	2/3	-1/6	200
1	0	-1	1/3	100
0	0	1/3	1/3	2100 = f(x)

Tato iterace byla poslední, protože poslední řádek obsahuje nezáporná čísla ve sloupcích odpovídající proměnným v kriteriu (tedy x_1 a x_2). Z poslední tabulky lze odečíst optimální řešení (x_1 obsahuje bázi *[0,1]*, které odpovídá sloupec ***b*** *=[200,100]*, platí $x_1 = 100$) $x^* = [100, 200, 0, 0]$.

<u>Obecně tedy:</u> po sestavení simplexové tabulky se aplikují 2 simplexová kriteria:

- **Simplexové kritérium I.:** *Jestliže v posledním řádku simplexové tabulky jsou některé koeficienty u nebázových (bázová proměnná například v poslední tabulce x_1 a x_2) proměnných záporné, pak jako novou bázovou proměnnou vybereme tu proměnnou, která má záporný a v absolutní hodnotě maximální koeficient v posledním řádku. Pokud všechny koeficienty v posledním řádku jsou nulové nebo kladné, je získané řešení optimální.*
- **Simplexové kritérium II.:** *Nechť j je index klíčového sloupce. Pro všechna aij* > 0 *vypočteme podíly koeficientů bi ve sloupci* ***b*** *a prvků aij v j-tém sloupci. Vypočteme tedy podíly* $\frac{b_i}{a_{ij}}$ *pro* $\forall i$*, pro která aij > 0. Nyní vyberu takové i = k, aby* $\frac{b_k}{a_{kj}} = \min_i \frac{b_i}{a_{ij}}$ *Prvek s indexem (k, j) je* ***klíčový prvek****. Znamená to, že proměnná k vstoupí do nové báze a příslušná bázová proměnná odpovídající k-tému řádku z báze vypadne. Pokud pro všechna i platí* $a_{ij} < 0$*, pak úloha nemá konečné řešení.*

<u>Speciální případy řešení:</u>

- **Alternativní optimální řešení**
  Pokud v posledním řádku (který reprezentuje kritérium) jsou všechny koeficienty nezáporné, ale některé jsou nulové i u nebázových proměnných, existují **alternativní optimální řešení**.
  Jedno alternativní optimální řešení najdeme obvyklým postupem a označíme jej x_1^* (to je jeden krajní bod množiny optimálních řešení).
  Je-li v posledním řádku nula u *j*-té nebázové proměnné, pak ji známým způsobem zahrneme do báze a získáme jiné optimální řešení x_2^*
  To provedeme pro všechny sloupce *j*, u kterých je nula u nebázových proměnných. Tím získáme všechny krajní body x_i^* množiny optimálních řešení. Jejich konvexní kombinace určuje množinu optimálních alternativních řešení:
  $$x^* = \sum_{\forall i} k_i x_i^*, \qquad \sum k_i = 1, \quad k_i \geq 0$$
- **Neomezená řešení**
  Je-li některý koeficient v posledním řádku simplexové tabulky záporný, pak jeho zvětšení (z nuly na nenulovou hodnotu) povede ke zvětšení kritéria. Pokud v jemu odpovídajícím sloupci jsou všechny koeficienty $a_{i,j}$ záporné, můžeme odpovídající proměnnou zvětšovat nade všechny meze. Kritérium neomezeně roste a přitom jsou všechna omezení splněna.

- **Adjungovaný problém lineárního programování**

V případě řešení problému lineárního programování (LP)

max $\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} : \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge 0\}$,

získáváme výchozí přípustnou jednotkovou bázi u doplňkových proměnných a za předpokladu $\boldsymbol{b} \ge 0$ je možno napsat výchozí řešení jako nezápornou lineární kombinaci jednotkových vektoru báze.

Je-li obecně LP problém v kanonickém tvaru

min,max $\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} : \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge 0\}$,

a matice $\boldsymbol{A}$ obsahuje jednotkovou submatici o hodnosti m (m je počet omezujících rovnic), potom výchozí bázické přípustné řešení $\boldsymbol{x}$ získáme tak, že jeho souřadnice odpovídající jednotkovým sloupcům položíme rovny prvkům b_i (i = 1,2 .... m) a ostatní souřadnice položíme rovny nule. Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ LP problému v kanonickém tvaru neobsahuje vhodnou jednotkovou submatici, není výchozí bazické přípustné řešení zřejmé. V tomto případě je účelné použít tzv. *metodu umělé báze*.

LP problém v kanonickém tvaru, který neobsahuje jednotkovou bázi, rozšíříme zavedením tzv. *umělých* proměnných u_1, u_2, ..., u_m a vytvoříme tak jednotkovou *umělou bázi*. Účelovou funkci lze napsat ve tvaru:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n + wu_1 + \ldots. + wu_m \rightarrow \min,$$

omezení řešení je ve tvaru

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n + u_1 && = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n \quad + u_2 && = b_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n + \qquad + u_m && = b_m,\\
&x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0;\ u_1, u_2, \ldots, u_m \ge 0;\ w >>> 0..\text{velké kladné číslo.}
\end{aligned}$$

Rozšířením úlohy o umělé proměnné jsme získali nový LP problém, který nazýváme *adjungovaný LP problém*. Adjungovaný problém je ale jiná úloha než původní LP problém, proto je nutné ukázat souvislosti řešení obou problému.

Souvislosti řešení adjugovaného LP problému a původní LP úlohy

- Existuje-li optimální řešení adjugovaného LP problému s nulovými umělými proměnnými, potom je optimálním řešením původního LP problému.
- Existuje-li optimální řešení adjugovaného LP problému, které obsahuje kladné umělé proměnné, potom neexistuje přípustné řešení původního LP problému (množina řešení původního LP problému je prázdná).
- Nemá-li adjugovaný LP problém konečné optimální řešení, nemá ani původní problém konečné optimální řešení.

3. Dualita v LP:

- zdroje: slidové skriptum k X35ORR prof. Štecha

Každé úloze lineárního programování je přirazen jistý LP problém, který se nazývá duální. Původní úloha je vzhledem k této úloze primární. Poznatky o dualitě slouží k hlubšímu rozboru řešení a úloh LP, k odvození speciálních metod řešení a k zefektivnění metod řešení.

Primární úloha - problém:

max { $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge 0$ }

Duální úloha k primárnímu problému:

min { $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\lambda} \ge 0$ } (odvozený tvar od prof. Štechy)

min { $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\lambda} \ge \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\lambda} \ge 0$ } (tvar z jiných materiálů)

4. Nelineární programování:

- zdroje: slidové skriptum k X35ORR prof. Štecha

Nelineární programování se zabývá řešením optimalizačních problému, u nichž je modelem situace **statický systém**. Jedná se tedy o metody hledání extrémů funkcí více proměnných, které podléhají různým omezením. Tyto problémy můžeme také označovat jako **statické optimalizace** nebo úlohy **matematického programování**. Úlohy matematického programování lze řešit **analyticky** (v jednoduchých případech – z nutných a postačujících podmínek se získá soustava rovnic a nerovnic…. – **viz níže**) nebo **numerickými metodami** (**viz 5.okruh**).

Klasifikace úloh mat.prog.: základní úloha je nalézt extrém (min či max) skalární funkce f(x), kde hledaný vektor x je prvkem nějaké množiny X:

$$\min\{\, f(x) \,:\, x \in X \subset E^n\}$$

Kde E^nje n-rozměrný Eukleidův prostor.

Pozn.: *min{ f(x) : x ∈X } = - max{ - f(x) : x ∈X }*

Extrém je relativní (lokální – v okolí bodu) nebo globální. Většina algoritmů umožní nalézt pouze lokální. Globální nalezneme pouze za předpokladů o konvexnosti problému – konvexnost kriteriální funkce i omezující množiny.

Pokud omezující množina $X = E^n$, nemáme omezení – problém určení **volného extrému**.

Pokud máme omezení **– vázaný extrém.**

Obecná úloha nelineárního programování je úloha, ve které je minimalizovaná funkce f(x) nelineární a omezení jsou určena soustavou rovnic i nerovnic (rovnice lze převést na nerovnice a obráceně).

5. Vázaný extrém:

- zdroje: slidové skriptum k X35ORR prof. Štecha

Minimalizační problémy s funkcionálními omezeními ve tvaru rovnic a nerovnic:

$$\min\{\, f(x)\colon h_1(x) = 0, \dots, h_m(x) = 0;\;\; g_1(x) \le 0, \dots, g_p(x) \le 0\}$$

Zavedením vektorových rovnic: $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = [h_1,\dots,h_m]^T$ a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = [g_1,\dots,g_p]^T$

$$\min\{\, f(x)\colon \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0;\;\; \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \le 0\}$$

Aktivní omezení: omezení, které se aktivně uplatní - omezení ve tvaru rovnosti se uplatní v každém bodě a omezení $g_i(x) \le 0$ je aktivní v bodě x, platí-li $g_i(x) = 0$.

Neaktivní omezení: (v bodě x platí $g_i(x) < 0$) se neuplatní a můžeme ho tedy ignorovat.

Regulární bod množiny omezení: Aktivní omezení $h(x) = 0$, kterých nechť je m, definují v n-rozměrném prostotu varietu. Jsou-li omezení regulární, pak má varieta dimenzi n-m.

Definice: *Bod x* je regulární bod množiny* $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0\}$*, jsou-li gradienty* $\nabla h_i(\boldsymbol{x})$ *v bodě x* lineárně nezávislé, neboli hodnost Jacobiho matice*

$$\frac{dh(x^*)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dh_1(x^*)}{dx_1} & \frac{dh_1(x^*)}{dx_n} \\ \frac{dh_m(x^*)}{dx_1} & \frac{dh_m(x^*)}{dx_n} \end{bmatrix} = \nabla h(x^*)^T$$

je rovna počtu omezení m. Regularita bodu není vlastnost množiny X, ale její reprezentace pomocí funkcí h(x).

Omezení typu rovnost:

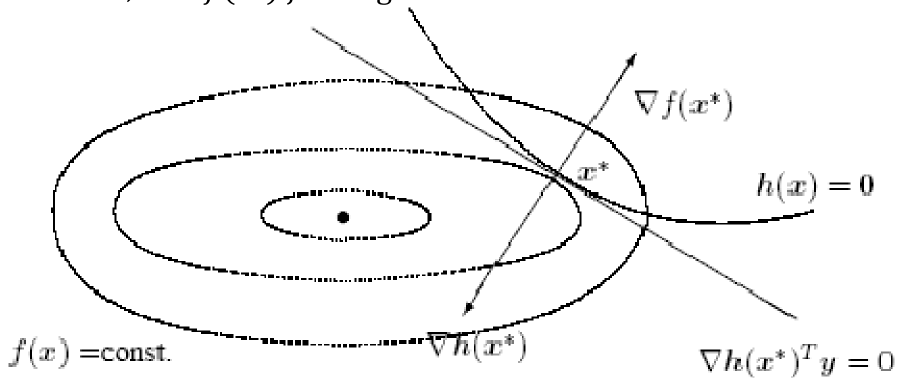
$$\min\{ f(x) : \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

Nutné podmínky 1.řádu:

Lemma: *Nechť x* je regulární bod omezení **h(x)** = 0 a je to lokální extrém funkce **f(x)** vzhledem k omezením. Pak pro všechna **y** ∊ E^n splňující:*

$$\nabla h(x^*)^T y = 0 \text{ musí také platit } \nabla f(x^*)^T y = 0$$

To znamená, že $\nabla f(x^*)$ je ortogonální k tečné hadrovině – viz obr.



Věta: *Nechť x* je bod lokálního extrému f(x) vzhledem k omezení **h(x)** = 0. x*je regulární bod omezení. Pak existuje vektor **λ** ∊ E^m že*

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0$$

Lagrangeova funkce pro omezení typu rovnost:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$$

2 nutné podmínky pro nalezení extrému – vychází z předchozích nutných podmínek:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \nabla_x f(x) + \nabla_x h(x)\lambda = 0$$
$$\nabla_\lambda L(x, \lambda) = h(x) = 0$$

(při nesplnění regularity nutné podmínky neplatí)

Podmínky (nutné a postačující) 2. řádu: souvisí s Hessovou maticí:

Postačující p.: *Nechť x* splňuje omezení h(x*) = 0 a existuje λ, že platí* $\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda = 0$. *Dále předpokládáme, že Hessova matice H(x*) je pozitivně definitní na tečné nadrovině M. Pak x* je bod lokálního minima f(x) vzhledem k omezením h(x) = 0.*

6. Karush-Kuhn-Tuckerova věta, citlivost, dualita – pokračování tématu vázaného extrému a nelineárního programování:

- zdroje: slidové skriptum k X35ORR prof. Štecha

Karush-Kuhn-Tuckerova věta:

Tato věta definuje nutné podmínky prvního řádu řešení minimalizační úlohy obsahující omezení s nerovnostmi:

$$\min\{ f(x) : h(x) = 0; g(x) \leq 0\}$$

Definice (spíše pro doplnění): **Regulární bod omezení**: *Nechť x^* je bod splňující omezení a nechť* J *je množina indexů* j *pro která $g_j(x) = 0$ (omezení jsou aktivní). Pak x^* je regulární bod omezení, jestliže gradienty $\nabla h_i(x)$, $\nabla g_j(x)$, pro $1 \leq i \leq m$;* j *$\in J$ jsou lineárně nezávislé.*
Věta KKT: *Nechť x^* je bod relativního minima problému a x^* je regulární bod omezení. Pak existuje vektor $\lambda \in E^m$ a vektor $\mu \in E^p$, že:*

$$\nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\lambda + \nabla g(x^*)\mu = 0$$
$$\mu^T g(x^*) = 0$$
$$\mu \geq 0$$

Neaktivní omezení – nulový Lagrangeův koeficient; aktivní – libovolný nezáporný

Lagrangeova funkce: $L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)$
KKT nutné podmínky:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0$$
$$\nabla_\lambda L(x, \lambda, \mu) = 0$$
$$\nabla_\mu L(x, \lambda, \mu) \leq 0$$
$$\nabla_\mu L(x, \lambda, \mu)\mu = 0, \qquad \mu \geq 0$$

<u>Dualita:</u>
Původní – primární problém:

$$\min\{ f(x) : g(x) \leq 0\}$$

Lagrangeova funkce:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

Dvě funkce:

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) \qquad\qquad \phi(\lambda) = \min_x L(x, \lambda)$$

Pro tyto funkce definujeme 2 úlohy:

$$(A) \qquad \min_x \varphi(x) = \min_x \max_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = p^*$$
$$(B) \qquad \max_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} \min_x L(x, \lambda) = d^*$$

Úloha (A) je totožná s původní primární úlohou. Úloha (B) je duální úloha. Vtah mezi primární a duální úlohou:

$$p^* \geq d^*$$

Nezáporný rozdíl *(p-d) ≥ 0* se nazývá dualitní mezera (při konvexní úloze *p*=d** - silná dualita). *p** je lze interpretovat jako horní cenu hry a *d** jako dolní.
Duální úlohu lze ještě upravit:

$$\min_x L \ \rightarrow \ \frac{dL}{dx} = \frac{df}{dx} + \lambda^T \frac{dg}{dx} = 0$$

Pak tvar duální úlohy:

$$\max_\lambda\{ f(x) + \lambda^T g(x) : \ \frac{df}{dx} + \lambda^T \frac{dg}{dx} = 0; \ \lambda \geq 0\}$$

<u>Citlivost</u>

- **Omezení typu rovnosti:**
  Citlivostní věta (stínové ceny) odpovídají na otázku, jak se mění kritérium, pokud měníme omezující podmínky.
  Věta: *Nechť f, $\boldsymbol{h} \in C^2$. Mějme problém:*

  $$\min\{ f(x) : \boldsymbol{h}(x) = \boldsymbol{b}\} \qquad x^*(\boldsymbol{b}) = \arg\min_x\{\}$$

  *Pro **b** = 0 je řešením regulární bod **x*** a odpovídající **λ** je Lagrangeův koeficient. Při* *tom v bodě **x*** jsou splněny postačující podmínky druhého řádu pro ostré lokální minimum. Potom pro **b** $\in E^m$ je **x*(b)** spojitě závislé na **b**, takové, že **x*(0) = x***. Potom:*

$$\nabla_b f\big(x^*(b)\big)|_{b=0} = -\lambda$$

Velikost Lagrangeova koeficientu tedy ukazuje, jak rychle se mění kritérium při změně omezení. Přibližně tedy platí (přírůstek kriteria/přírůstek omezení):

$$\frac{\Delta f}{\Delta b_i} \doteq -\lambda_i$$

Velikost Lagrangeova koeficientu ukazuje tedy na důležitost příslušného omezení. Kritérium často vyjadřuje cenu, proto Lag.koef. ukazuje na cenu příslušného omezení – proto se Lag.koef. říká „stínové ceny". Velké λ značí kritická omezení.
Je-li nějaký Lag.koef. nulový – degenerované omezení – změna omezení nevyvolá změnu kritéria.

- **Omezení typu nerovnost**
  Obdobnou analýzu lze provést i zde – lagrangeův koeficient je roven citlivosti kritéria na změnu omezení – stínová cena

7. Vícekriteriální optimalizace:

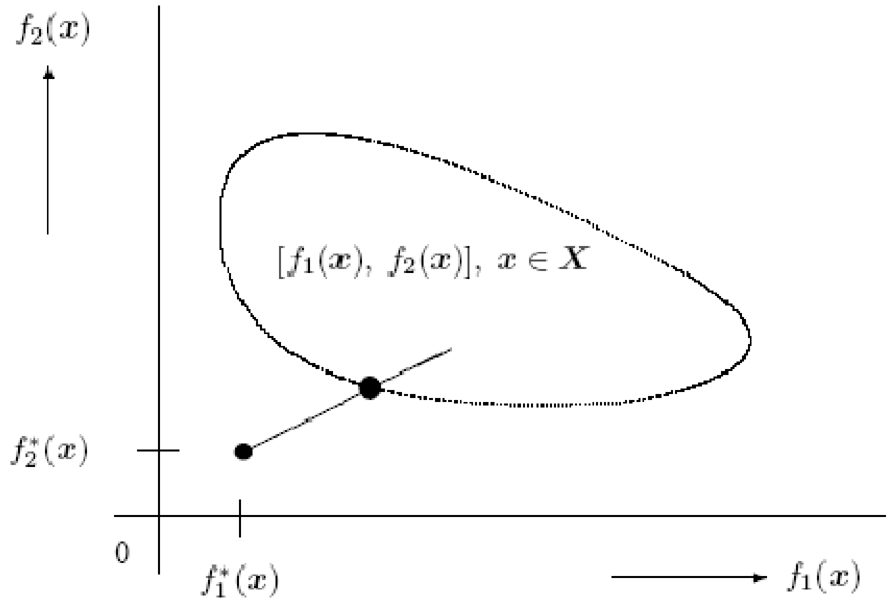
- zdroje: slidové skriptum k X35ORR prof. Štecha

V reálných rozhodovacích situacích často sledujeme více kritérií, podle nichž hodnotíme nejlepší varianty řešení – chceme min. kritéria $f_1(x)$ až $f_m(x)$.
Problém správně definovat úlohu optimalizace v případě vícekriteriálnosti.
Často vyšší zisk je spojen s vyšším rizikem.
Teorie užitku přiřazuje variantám řešení číselné ohodnocení (užitek) tak, aby hodnota užitku byla v souladu s preferencemi rozhodujícího subjektu – vyšší užitek znamená vyšší preferenci.
Vícekriteriální optimalizace - víceaspektní, víceatributní či vektorová optimalizace. To vede na vektorové či kompromisní programování.

Řešení:

a) Snažíme se vícekriteriální optimalizační problém převést na **problém skalární s jedním optimalizačním kritériem**:
   - **volbou vah u jednotlivých kritérií** – každému kritériu se přiřadí váha, která vyjadřuje jeho preferenci. Pokud kritérium preferuji, dám velkou váhu. Jednotlivá kritéria $f_1(x)$ až $f_m(x)$, pak výsledné jediné kritérium je
     $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_m f_m(x)$ – koeficienty α vyjadřují váhy/preference
   - **metodou cílového programování –** stanoví se cíl, kterého se snažíme dosáhnout ve všech kritériích. Protože stanoveného cíle nelze dosáhnout současně ve všech kritériích, pak se snažíme alespoň minimalizovat vzdálenost konkrétního řešení od cíle.
     Metoda cílového programování vede na úlohu:
     $$min\,\{\lambda:\ f_i(x) - w_i\lambda \le f_i^*(x), i = 1 \ldots p, x \in X\}$$
     Kde $f_i^*(x)$ je cíl, kterého chceme dosáhnout v i-tém kritériu, λ je skalár bez omezení a $w_i > 0$ jsou váhové koeficienty. Pak $w_i\lambda$ udává rozdíl mezi cílem a skutečnou hodnotou kritéria.
     Pokud j-té kritérium chceme co nejvíce přiblížit k cíli, je třeba volit u něho výrazně menší váhový koeficient - $w_j \ll w_i$ pro $i \neq j$.

Přípustná řešení $x \in X$ vytvářejí v prostoru kritérií množinu možných hodnot kritérií. Hledáme přípustné řešení, které leží v průsečíku polopřímky vycházející z cílového bodu $f_i^*(x)$ s množinou přípustných hodnot kritérií.
Směrnice polopřímky vycházející z cílového bodu $f_i^*(x)$ je určena váhami w_i.



Obr.7.1: Optimální řešení podle cílového programování

- **lexikografickým uspořádáním kritérií –** nebo-li uspořádání kritérií podle důležitosti. Optimalizujeme první kritérium a z množiny optimálních řešení vybereme řešení, které minimalizuje druhé kritérium v pořadí atd.
- **minimaxovou optimalizací** - vede na úlohu optimalizace, ve které hledáme takové přípustné řešení, v němž je maximální hodnota nějakého kritéria minimální:

$$\min_{x \in X} \max_i f_i(x)$$

  Problém je totožný s cílovým programováním, kde volíme váhy w_i všechny stejné a cíl je v počátku. Tato formulace připomíná problémy z teorie her.

b) Jiný přístup je řešení vícekriteriální opt. **bez převodu na skalární problém** – hledáme nedominované varianty (paretovsky optimální), to jsou varianty přípustného řešení, že neexistuje jiná přípustná varianta, při které některé kritérium dosahuje nižší hodnoty, a ostatní kritéria nerostou.
Jedno kritérium lze zlepšit pouze na úkor zhoršení jiného kritéria.